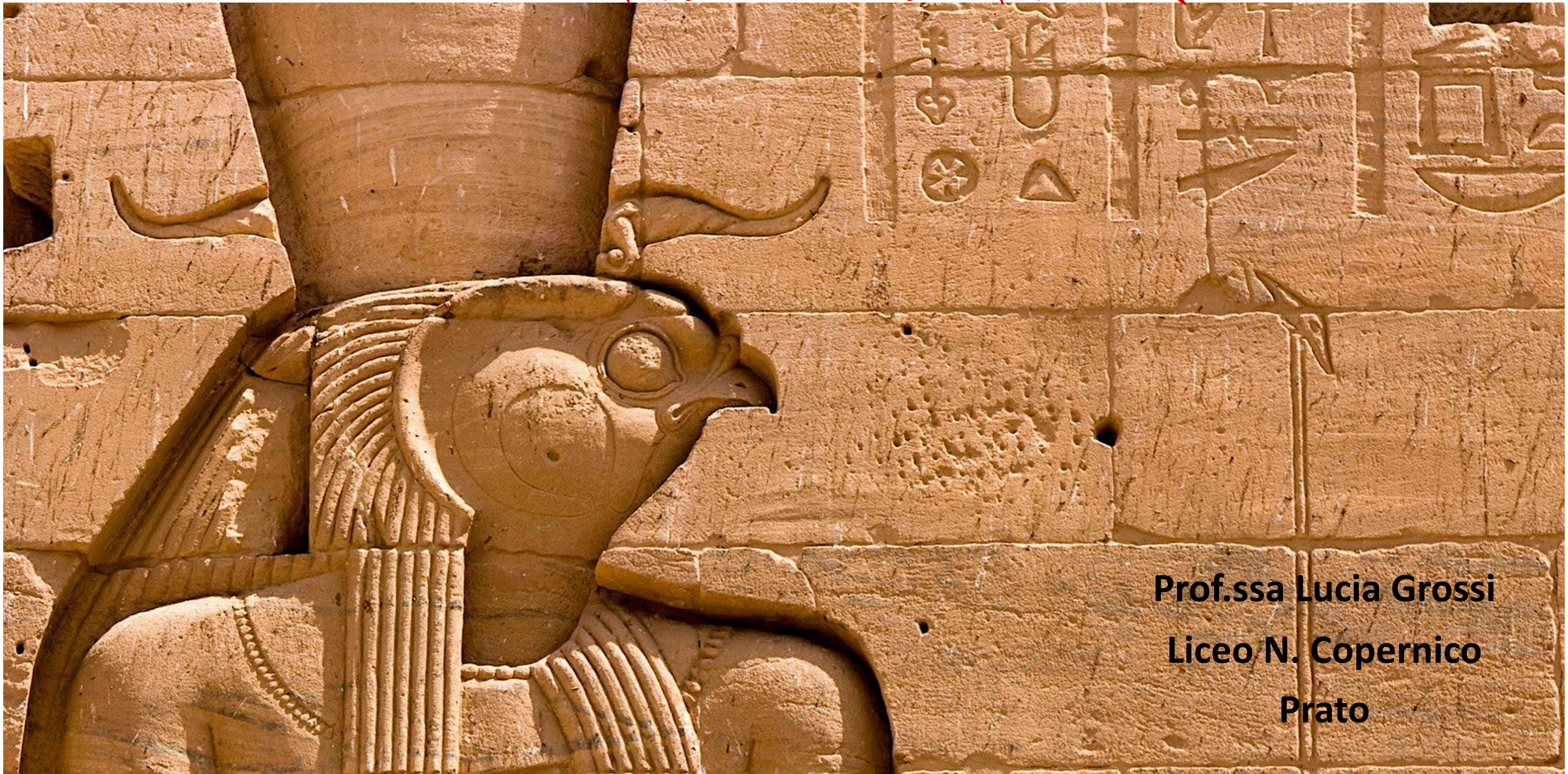
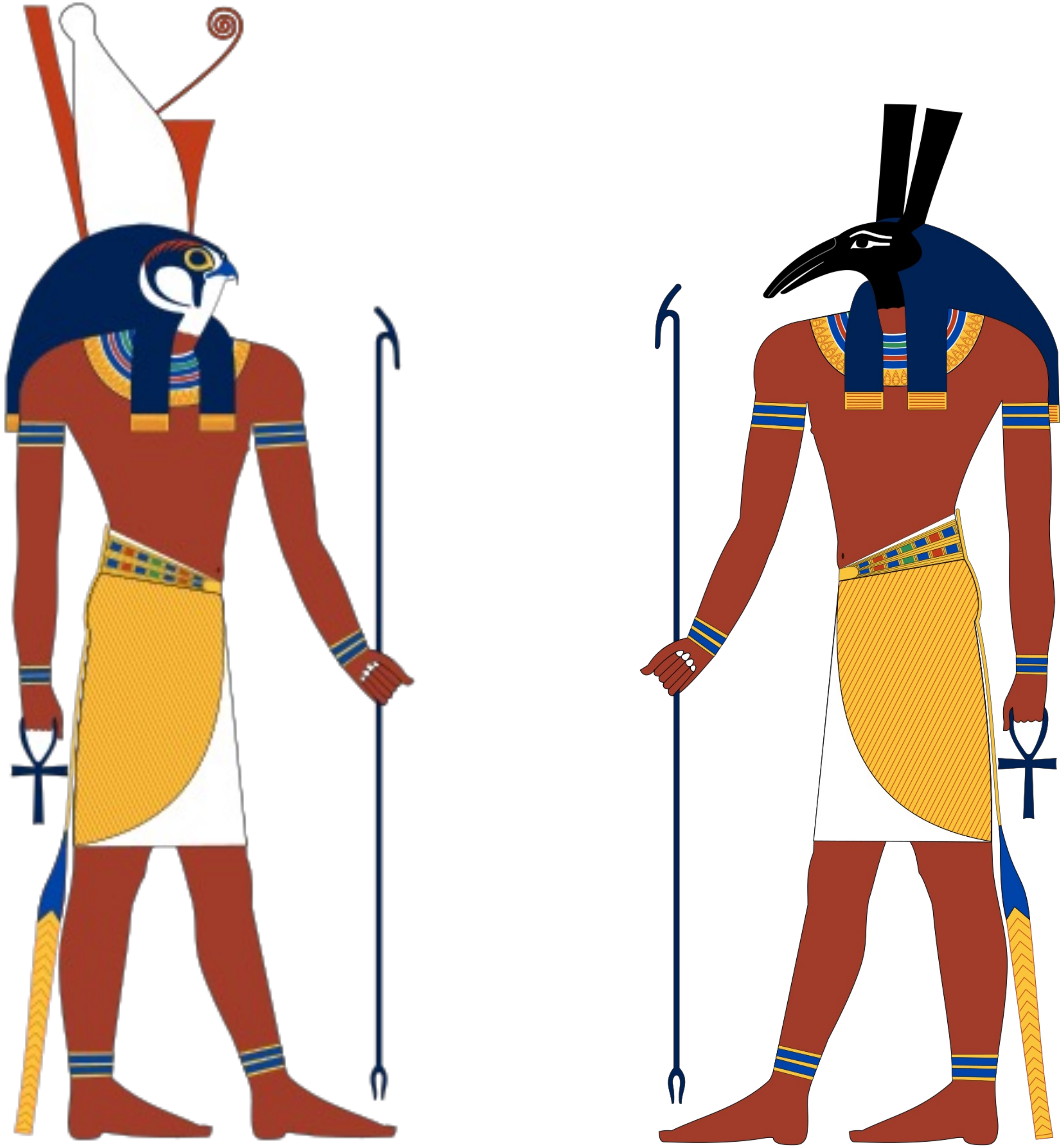
L'OCCHIO DI HORUS



Prof.ssa Lucia Grossi
Liceo N. Copernico
Prato

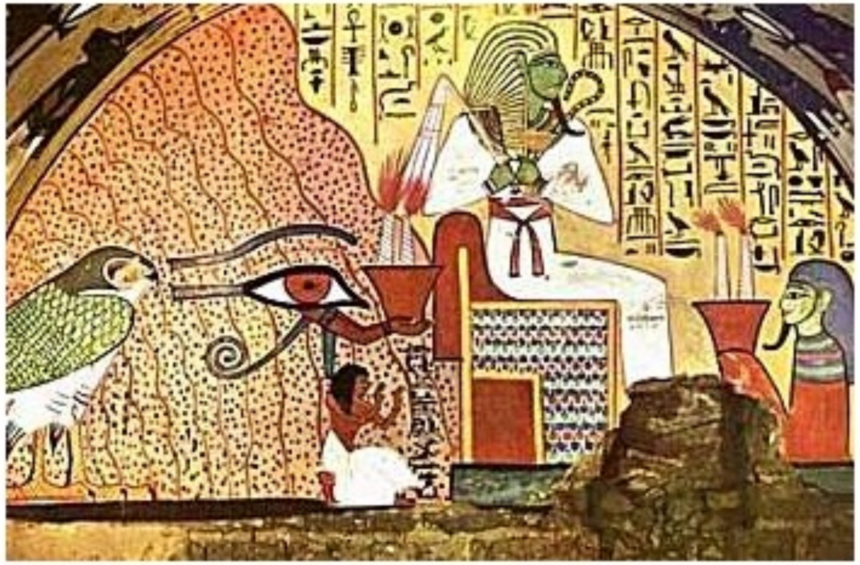
Il mito

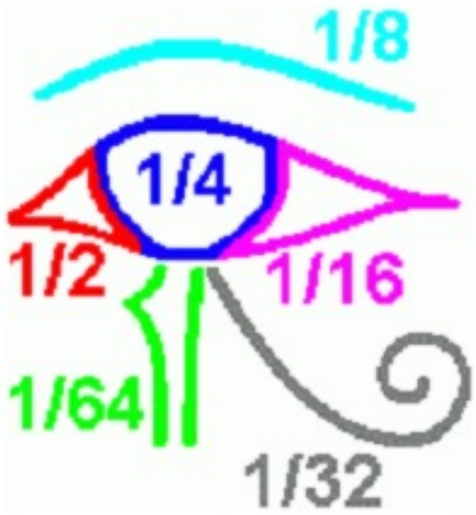
Il mito racconta che durante la lotta tra il dio Seth e il dio Horus, l'occhio del dio falco fu colpito da un colpo di Seth e smembrato in sei parti. In seguito il dio Toth riunì le parti dell'occhio …



L'occhio di Horus

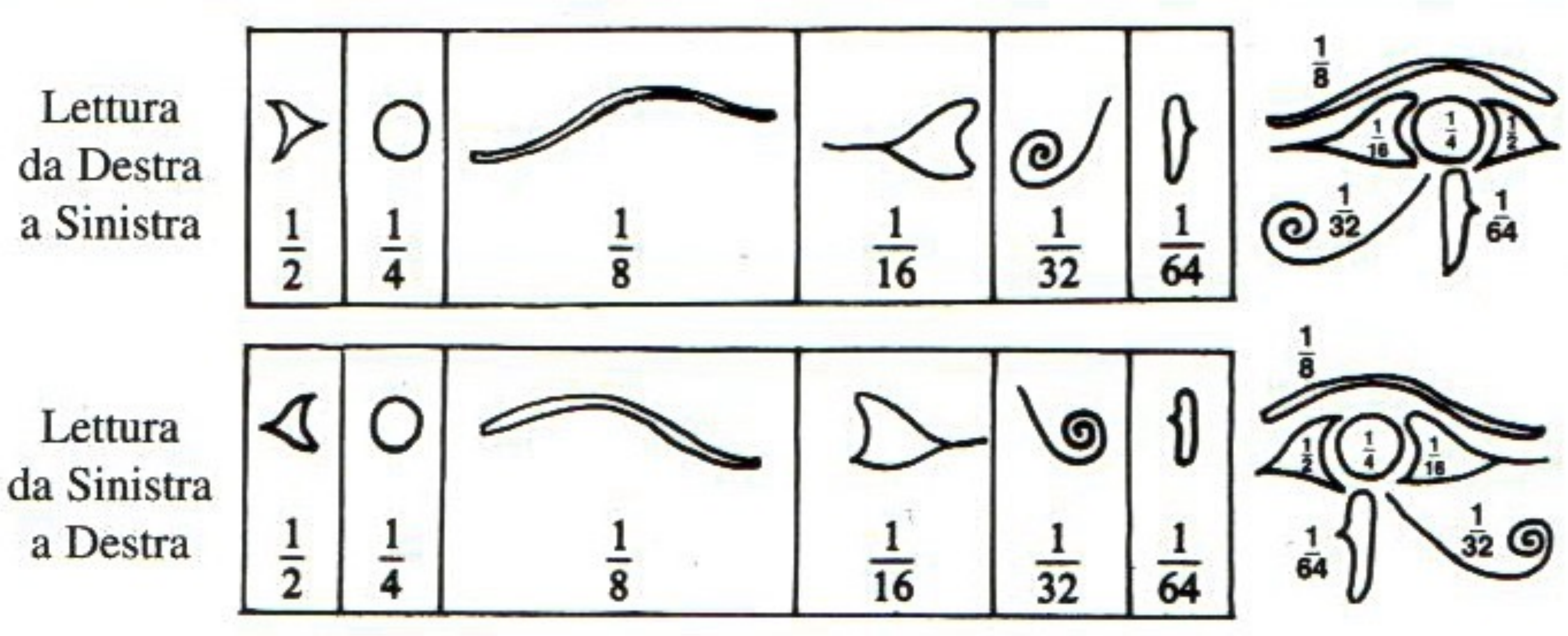
Ogni parte dell' *Occhio di Horus* corrisponde a particolari numeri frazionari.





L'occhio di Horus

Ogni parte dell'occhio corrisponde a potenze di $\frac{1}{2}$



L'occhio di Horus

Riunendo le parti dell'occhio, l'unità è stata veramente ricostituita?

La somma delle frazioni è uguale all'unità?

Calcola la somma delle frazioni.

L'occhio di Horus

In realtà no perché

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

Ma si narra che la frazione mancante sarebbe stata magicamente fornita dal dio Thot, dio dell'arte della scrittura con la testa di ibis.

Qual è la frazione mancante?

L'occhio di Horus

Se continuo a sommare potenze di $\frac{1}{2}$ *cosa accade?*

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^{6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=$$

$$=\frac{127}{128}=$$

$$=1-\frac{1}{128}$$

L'occhio di Horus

Hai scoperto la regola?

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 =$$

$$= \frac{255}{256} =$$

$$= 1 - \frac{1}{256}$$

L'occhio di Horus

Proviamo a generalizzare:

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^{6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{7}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=$$

$$=\frac{2^{n}-1}{2^{n}}=$$

$$=1-\frac{1}{2^{n}}$$

L'occhio di Horus

Se continuo a sommare indefinitamente potenze di $\frac{1}{2}$, *cioè*

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots$$

cosa ottengo?

L'occhio di Horus

Riflettiamo: consideriamo il caso generale e immaginiamo che n aumenti.

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=1-\frac{1}{2^{n}}=$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Cosa accade al termine $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ *quando n aumenta?*

Geometricamente

Da un foglio A4 ricava un quadrato avente come lato il lato minore del foglio A4.

Questo quadrato corrisponde alla nostra unità: scrivi sopra il numero 1.

Ricava un altro quadrato dal secondo foglio A4.

Taglialo lungo una diagonale.

A quale frazione dell'intero corrisponde ciascun triangolo? Scrivila sopra uno dei triangoli.

Taglia a metà l'altro triangolo lungo la bisettrice dell'angolo retto.

Cosa ottieni?

Ripeti il procedimento finché è possibile.

Immaginando di poter proseguire all'infinito, qual è la somma delle frazioni ottenute?

Geometricamente

https://www.magisto.com/int/album/video/OHc-T1sGBQcuPCkGDmEwCXx6?l=vsm&o=a&c=e

Risoluzione di Dilo

Questo è il procedimento che, durante una lezione analoga, un alunno di terza media utilizzò per calcolare la somma

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\ldots$$

Moltiplica tutto per 2. *Cosa ottieni? Cosa osservi?*

$$2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\ldots\right]=$$

Risoluzione di Dilo

$$2\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\dots\right]=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\dots$$

Se chiamo $\boldsymbol{S}$ la somma che voglio calcolare, ottengo:

$$2S=1+S$$

che, risolta, dà S $= \mathbf{1}$

Con i polinomi

Proviamo con un po' di algebra

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n)=$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n-$$
$$-x-x^2-x^3-x^4-\cdots-x^n-x^{n+1}=$$
$$=1-x^{n+1}$$

Questo cosa ci dice?

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n=$$

$$=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Con i polinomi

La formula che abbiamo ottenuto cosa consente di calcolare?

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n =$$

$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Questa relazione permette di calcolare la somma di tutte le potenze di un numero da quella con esponente zero fino ad un esponente qualunque.

Con i polinomi

Se ad x sostituisco $\frac{1}{2}$ *ottengo:*

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

Per i valori n=6, n=7, n=8 si ritrovano i risultati precedentemente calcolati?